



On non-exponential stability of delay systems of neutral type with non-singular neutral term

Rabah Rabah, Grigory Sklyar, Pavel Yu. Barkhayev

► To cite this version:

Rabah Rabah, Grigory Sklyar, Pavel Yu. Barkhayev. On non-exponential stability of delay systems of neutral type with non-singular neutral term. Spectral and Evolution Problems, 2011, 20 (2), pp.93–98. <hal-00580024>

HAL Id: hal-00580024

<https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00580024>

Submitted on 15 May 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Р. РАБАХ, Г.М. СКЛЯР, П.Ю. БАРХАЕВ

О неэкспоненциальной устойчивости систем с запаздыванием нейтрального типа с вырожденным нейтральным слагаемым¹

В работе изучается сильная асимптотическая устойчивость систем нейтрального типа с одним вырожденным нейтральным слагаемым. Мы рассматриваем операторную модель системы в гильбертовом пространстве. Для получения достаточного условия сильной устойчивости мы используем две техники: базисов Рисса из инвариантных конечномерных подпространств и ограниченность резольвенты на некотором подпространстве спектрального разложения фазового пространства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем системы с распределенным запаздыванием заданные следующим функционально-дифференциальным уравнением:

$$\dot{z}(t) = A_{-1}\dot{z}(t-1) + \int_{-1}^0 A_2(\theta)\dot{z}(t+\theta) d\theta + \int_{-1}^0 A_3(\theta)z(t+\theta) d\theta, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где A_{-1} постоянная $n \times n$ матрица, A_2, A_3 матрицы размера $n \times n$ с элементами принадлежащими пространству $L_2(-1, 0)$.

Исследуется задача асимптотической устойчивости данного класса систем. Задача экспоненциальной устойчивости систем нейтрального типа является хорошо изученной (см., например, [7]), однако, экспоненциально неустойчивые системы могут оказаться сильно асимптотически устойчивыми. Э тот факт является следствием специального поведения спектра систем нейтрального типа (см. [5]). В работе [10] задача асимптотической неэкспоненциальной устойчивости была подробно исследована в предположении невырожденности нейтрального слагаемого: $\det A_{-1} \neq 0$. В данной работе мы отказываемся от этого ограничения и показываем, что результат о неэкспоненциальной устойчивости доказанный в [10] имеет место вне зависимости от условия $\det A_{-1} \neq 0$.

Подход, который мы применяем, основывается на операторной модели систем (1) в гильбертовом пространстве $M_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}^n \times L_2(-1, 0; \mathbb{C}^n)$ (см. [10, 6]):

$$\dot{x} = \mathcal{A}x, \quad \mathcal{A}x(t) = \mathcal{A}(y(t), z_t(\cdot)) = \left(\int_{-1}^0 [A_2(\theta)\dot{z}_t(\theta) + A_3(\theta)z_t(\theta)]d\theta, \quad \frac{dz_t(\theta)}{d\theta} \right), \quad (2)$$

где оператор \mathcal{A} порождает C_0 -полугруппу и его область определения задается как

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{(y, z(\cdot))^T : z \in H^1(-1, 0; \mathbb{C}^n), y = z(0) - A_{-1}z(-1)\} \subset M_2.$$

Оператор \mathcal{A} системы (1)-(2) обладает только дискретным спектром $\sigma(\mathcal{A})$, и, более того, рост полугруппы $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ определяется расположением спектра. Обозначим через $\omega_s = \sup\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ и $\omega_0 = \inf\{\omega : \|e^{At}x\| \leq Me^{\omega t}\|x\|\}$; имеет место соотношение $\omega_0 = \omega_s$ (см., например, [7]).

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта министерства науки и высшего образования Польши, грант No. N514 238438 и при поддержки École Centrale de Nantes, Франция.

Из последнего следует, что полугруппа $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда спектр \mathcal{A} удовлетворяет соотношению $\omega_s < 0$. Однако, этот тип устойчивости не является единственно возможным для систем вида (1)-(2) (аналогичная ситуация имеет место для некоторых систем гиперболического типа). А именно, если $\omega_s = 0$ (и $A_{-1} \neq 0$), тогда существует последовательность собственных значений, чьи действительные части стремятся к нулю, а мнимые части стремятся к бесконечности. В этом критическом случае экспоненциальная устойчивость не возможна: $\|e^{tA}\| \not\rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, но может иметь место асимптотическая неэкспоненциальная устойчивость: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{tA}x = 0$ для всех $x \in M_2$. Данный вид устойчивости исследовался для систем (1)-(2) в работе [10] при важном предположении $\det A_{-1} \neq 0$. Здесь мы предлагаем результат в общем случае, а именно, мы допускаем, что A_{-1} может быть вырождена и доказываем следующую теорему.

Theorem 1. *Положим $\sigma_1 = \sigma(A_{-1}) \cap \{\mu : |\mu| = 1\}$. Предположим, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ (необходимое условие). Следующие три взаимно исключающие ситуации могут иметь место:*

- (i) σ_1 состоит только из простых собственных значений. Тогда система (1)-(2) асимптотически устойчива.
- (ii) Собственному значению $\mu \in \sigma_1$ отвечает жорданов блок размера больше единицы. Тогда система (1)-(2) неустойчива.
- (iii) Ни одно собственное значение из σ_1 A_{-1} не обладает жордановым блоком размера больше единицы, но для некоторого $\mu \in \sigma_1$ его собственное подпространство имеет размерность два или более. Тогда система (1)-(2) может быть как устойчивой так и неустойчивой.

В случае $\det A_{-1} \neq 0$, спектр оператора \mathcal{A} расположен в вертикальной полосе $d_1 \leq \operatorname{Re} \sigma(\mathcal{A}) \leq d_2$, и, более того, $\sigma(\mathcal{A}) = \{\ln |\mu_m| + i(\arg \mu_m + 2\pi k) + \bar{o}(1/k) : \mu_m \in \sigma(A_{-1}), k \in \mathbb{Z}\}$ (см. [11, 10]). Данный факт позволяет доказать существование базиса Рисса из обобщенных собственных векторов для оператора $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$, отвечающего случаю $A_2(\theta) \equiv A_3(\theta) \equiv 0$. В общем случае оператор \mathcal{A} не порождает такого базиса Рисса (см. контрпример в [11] и некоторые общие условия в [13]), однако в работах [11, 10] было показано, что существует базис Рисса из \mathcal{A} -инвариантных конечномерных подпространств пространства M_2 (см. также работы [1, 2, 3], в которых исследуются базисы Рисса из подпространств решений). Существование такого базиса является мощным инструментом при анализе свойства устойчивости системы.

Если теперь предположить, что $\det A_{-1} = 0$, тогда приведенное выше расположение спектра порождается только ненулевыми собственными значениями $\mu_m \in \sigma(A_{-1})$, а весь спектр оператора может быть неограничен слева. В этом случае существование базиса Рисса из \mathcal{A} -инвариантных конечномерных подпространств для всего пространства M_2 не может быть гарантировано. Как следствие, доказательство пункта (i) приведенное в [10], которое существенно опирается на технику базисов Рисса, не может быть применено и необходим другой способ анализа устойчивости.

Целью данной работы является доказательство пункта (i) теоремы 1 для систем нейтрального типа с вырожденным нейтральным слагаемым. Для этого мы комбинируем технику базисов Рисса с анализом ограниченности резольвенты на некотором \mathcal{A} -инвариантном подпространстве. А именно, рассматривая собственные значения оператора \mathcal{A} , которые лежат достаточно близко к мнимой оси и используя результаты работы [11, 10], можно гарантировать, что соответствующие собственные вектора образуют базис Рисса замыкания своей линейной оболочки M_2^1 . Далее, мы доказываем, что фазовое пространство M_2 допускает спектральное разложение в прямую сумму двух \mathcal{A} -инвариантных подпространств: $M_2 = M_2^1 \oplus M_2^0$, где \mathcal{A} -инвариантное подпространство M_2^0 таково, что резольвента $R(\lambda, A)$

равномерно ограничена на нем для всех $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$. Таким образом сужение полугруппы $\{e^{tA}|_{M_2^0}\}_{t \geq 0}$ экспоненциально устойчиво (см., например, [12]), а для доказательства асимптотической устойчивости сужения полугруппы $\{e^{tA}|_{M_2^1}\}_{t \geq 0}$ мы используем те же методы, что и в работе [10]. Указанная схема требует достаточно громоздкой техники, которая только вкратце приводится в данной работе.

Кроме того, мы приводим пример семейства нейтральных систем, иллюстрирующий пункт (iii). В работе [10] пункт (iii) был показан через построение системы вида (2) в пространстве M_2 и это построение существенно использовало технику базисов Рисса. Это мотивировало нас к построению более простого и наглядного примера в терминах систем вида (1).

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

Дадим более точное описание спектра оператора \mathcal{A} . Обозначим через μ_1, \dots, μ_ℓ множество различных ненулевых собственных значений матрицы A_{-1} и через p_1, \dots, p_ℓ их кратности. Через $\tilde{\mathcal{A}}$ обозначим оператор \mathcal{A} в случае $A_2(\theta) \equiv A_3(\theta) \equiv 0$. Несложно видеть, что собственные значения $\tilde{\mathcal{A}}$ задаются выражением $\tilde{\lambda}_m^k = \ln |\mu_m| + i(\arg \mu_m + 2\pi k)$, $m = \overline{1, \ell}$, $k \in \mathbb{Z}$. Собственные значения оператора \mathcal{A} являются корнями уравнения

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = \Delta_{\mathcal{A}}(\lambda) = -\lambda I + \lambda e^{-\lambda} A_{-1} + \lambda \int_{-1}^0 e^{\lambda s} A_2(s) ds + \int_{-1}^0 e^{\lambda s} A_3(s) ds. \quad (3)$$

Рассуждая как в работе [9, Theorem 4], мы доказываем, что существует номер N_1 такой, что суммарная кратность корней уравнения $\det \Delta(\lambda) = 0$, содержащаяся внутри каждого круга $L_m^k(r^{(k)})$, равна p_m для всех $m = \overline{1, \ell}$ и $k : |k| \geq N_1$, где $L_m^k(r^{(k)})$ есть окружности с центрами в $\tilde{\lambda}_m^k$ и с радиусами $r^{(k)}$, удовлетворяющими соотношению $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (r^{(k)})^2 < \infty$. Обозначим эти корни (собственные значения оператора \mathcal{A}) как λ_m^k , $1 \leq m \leq \ell$, $|k| \geq N_1$.

Напомним обозначение $\sigma_1 = \sigma(A_{-1}) \cap \{\mu : |\mu| = 1\}$ и предположим, что $\sigma_1 = \{\mu_1, \dots, \mu_{\ell_1}\}$, $\ell_1 \leq \ell$. Всюду далее мы предполагаем, что $p_1 = \dots = p_{\ell_1} = 1$ (так как наша цель доказать пункт i) теоремы 1).

Для построения разложения пространства M_2 мы выделяем такое подмножество спектра $\sigma(\mathcal{A})$:

$$\Lambda_1 = \{\lambda_m^k \in \sigma(\mathcal{A}), 1 \leq m \leq \ell_1, |k| \geq N_2\} \quad \text{для некоторого} \quad N_2 \geq N_1, \quad (4)$$

и два подпространства в M_2 :

$$M_2^1 = \operatorname{Cl} \operatorname{Lin}\{\varphi : (\mathcal{A} - \lambda I)\varphi = 0, \lambda \in \Lambda_1\}, \quad (5)$$

$$\widehat{M}_2^1 = \operatorname{Cl} \operatorname{Lin}\{\psi : (\mathcal{A}^* - \bar{\lambda} I)\psi = 0, \lambda \in \Lambda_1\}. \quad (6)$$

Очевидно, M_2^1 является \mathcal{A} -инвариантным и \widehat{M}_2^1 является \mathcal{A}^* -инвариантным. Введем подпространство M_2^0 удовлетворяющее

$$M_2 = \widehat{M}_2^1 \oplus^\perp M_2^0. \quad (7)$$

Так как M_2^0 является ортогональным дополнением к \widehat{M}_2^1 в M_2 , то оно \mathcal{A} -инвариантно.

Remark 1. Множество Λ_1 определяется значением $N_2 \in \mathbb{N}$. Для любого малого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое N_2 такое, что Λ_1 принадлежит вертикальной полосе $\{\lambda : -\varepsilon < \operatorname{Re} \lambda < 0\}$.

Remark 2. Собственные вектора $\{\varphi_m^k\}$ оператора \mathcal{A} , соответствующие $\lambda_m^k \in \Lambda_1$, образуют базис Рисса замыкания своей линейной оболочки. Аналогичное

утверждение верно для собственных векторов $\{\psi_m^k\}$ оператора \mathcal{A}^* , которые соответствуют $\overline{\lambda_m^k}, \lambda_m^k \in \Lambda_1$.

Theorem 2. (о разложении в прямую сумму). *Имеет место следующее разложение пространства M_2 в прямую сумму:*

$$M_2 = M_2^1 \oplus M_2^0, \quad M_2^1, M_2^0 - \mathcal{A}\text{-инвариантны и заданы (4)–(7)}.$$

Доказательство. Собственные вектора $\varphi_m^k: (\mathcal{A} - \lambda_m^k I)\varphi_m^k = 0$ и $\psi_m^k: (\mathcal{A}^* - \overline{\lambda_m^k} I)\psi_m^k = 0$ имеют вид (см. [10, 9]):

$$\varphi_m^k = \left([I - e^{-\lambda_m^k} A_{-1}] x_m^k, e^{\lambda_m^k \theta} x_m^k \right), \quad x_m^k \in \text{Ker} \Delta(\lambda_m^k), \quad (8)$$

$$\psi_m^k = \left(y_m^k, [\overline{\lambda_m^k} e^{-\overline{\lambda_m^k} \theta} - A_2^*(\theta) + e^{-\overline{\lambda_m^k} \theta} \int_0^\theta e^{\overline{\lambda_m^k} s} (A_3^*(s) + \overline{\lambda_m^k} A_2^*(s)) ds] y_m^k \right),$$

$$y_m^k \in \text{Ker} \Delta^*(\overline{\lambda_m^k}).$$

Семейства функций $\{\varphi_m^k\}, \{\psi_m^j\}$ являются биортонормальными после нормализации и, более того,

$$\langle \varphi_m^k, \psi_m^k \rangle_{M_2} = -\langle \Delta'(\lambda_m^k) x_m^k, y_m^k \rangle_{\mathbb{C}^n}, \quad \text{где } \Delta'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda). \quad (9)$$

В силу (9) и (7) мы имеем $\varphi_m^k = \gamma_m^k + a_m^k \widehat{\psi}_m^k$, $\gamma_m^k \in M_2^0$, $\widehat{\psi}_m^k = \frac{1}{\lambda_m^k} \psi_m^k$. Следовательно, для любого $x \in M_2$ верно:

$$x = \widehat{x}_0 + \sum_{(m,k) \in Z} b_m^k \widehat{\psi}_m^k = \widehat{x}_0 - \sum_{(m,k) \in Z} \frac{b_m^k}{a_m^k} \gamma_m^k + \sum_{(m,k) \in Z} \frac{b_m^k}{a_m^k} \varphi_m^k = x_0 + \sum_{(m,k) \in Z} c_m^k \varphi_m^k, \quad (10)$$

где $\widehat{x}_0 \in M_2^0$, $x_0 = \widehat{x}_0 - \sum_{(m,k) \in Z} \frac{b_m^k}{a_m^k} \gamma_m^k \in M_2^0$ и $c_m^k = \frac{b_m^k}{a_m^k}$, $\sum_{(m,k) \in Z} |b_m^k|^2 < \infty$, $Z = \{(m,k) : 1 \leq m \leq l_1, |k| \geq N\}$. Для доказательства сходимости рядов из (10) мы используем следующие оценки:

Lemma 1. *Пусть $\|x_m^k\|_{\mathbb{C}^n} = 1$, $\|y_m^k\|_{\mathbb{C}^n} = 1$. Существуют константы $N \in \mathbb{N}$, $C > 0$, $0 < C_1 < C_2$ такие, что*

- (1) $\|\varphi_m^k\| \leq C$, $\|\widehat{\psi}_m^k\| \leq C$, где $\widehat{\psi}_m^k = \frac{1}{\lambda_m^k} \psi_m^k$;
- (2) $0 < C_1 \leq \left| \frac{1}{\lambda_m^k} \langle \Delta'(\lambda_m^k) x_m^k, y_m^k \rangle \right| \leq C_2$, для всех $1 \leq m \leq l_1, |k| \geq N$.

Эти оценки основаны на анализе структуры семейства матриц $\Delta(\lambda_m^k)$ и $\Delta'(\lambda_m^k)$ для больших значений параметра $|k|$. \square

3. ОГРАНИЧЕННОСТЬ РЕЗОЛВЕНТЫ

Следующим шагом является доказательство того факта, что сужение резольвенты на инвариантное подпространство M_2^0 : $R(\lambda, \mathcal{A})|_{M_2^0}$ является равномерно ограниченным в замкнутой правой комплексной полуплоскости. Явная форма резольвенты оператора \mathcal{A} приведена в работе [11, 10]:

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{pmatrix} z \\ \xi(\cdot) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{-\lambda} A_{-1} \int_{-1}^0 e^{-\lambda s} \xi(s) ds + (I - e^{-\lambda} A_{-1}) \Delta^{-1}(\lambda) D(z, \xi, \lambda) \\ \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-s)} \xi(s) ds + e^{\lambda\theta} \Delta^{-1}(\lambda) D(z, \xi, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $z \in \mathbb{C}^n, \xi(\cdot) \in L_2(-1, 0; \mathbb{C}^n)$, $\Delta(\lambda)$ определяется (3) и $D(z, \xi, \lambda)$ – следующая вектор-функция: $D(z, \xi, \lambda) = z + \lambda e^{-\lambda} A_{-1} \int_{-1}^0 e^{-\lambda\theta} \xi(\theta) d\theta - \int_{-1}^0 A_2(\theta) \xi(\theta) d\theta - \int_{-1}^0 e^{\lambda\theta} [\lambda A_2(\theta) + A_3(\theta)] \int_0^\theta e^{-\lambda s} \xi(s) ds d\theta$.

Theorem 3. (об ограниченности резольвенты). *Сужение резольвенты $R(\lambda, \mathcal{A})$ на подпространство M_2^0 является равномерно ограниченным для всех $\lambda : \text{Re} \lambda \geq 0$, то есть существует $C > 0$ такое, что $\|R(\lambda, \mathcal{A})x\| \leq C\|x\|$, $x \in M_2^0$.*

Доказательство. Из явного вида резольвенты (11) можно заключить, что основная сложность заключается в доказательстве ограниченности слагаемого $\Delta^{-1}(\lambda)D(z, \xi, \lambda)$. А именно, так как $\det \Delta(\lambda_m^k) = 0$ для $\lambda_m^k \in \Lambda_1$ и $\operatorname{Re} \lambda_m^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то норма $\Delta^{-1}(\lambda)$ бесконечно растет когда $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow 0$ и $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty$ одновременно. Однако произведение $\Delta^{-1}(\lambda)D(z, \xi, \lambda)$ оказывается ограниченным для $(z, \xi(\theta)) \in M_2^0$:

Lemma 2. Вектор-функция $\Delta^{-1}(\lambda)D(z, \xi, \lambda)$ равномерно ограничена в ограниченных окрестностях $U_\delta(\lambda_m^k)$ собственных значений $\lambda_m^k \in \Lambda_1$ для некоторого фиксированного $\delta > 0$, т.е.:

1. Для всех $1 \leq m \leq \ell_1$, $|k| > N$ и $\lambda \in U_\delta(\lambda_m^k)$ верна оценка $\|\Delta^{-1}(\lambda)D(z, \xi, \lambda)\| \leq C_{m,k}$;
2. Существует $C > 0$ такое, что $C_{m,k} \leq C$ для всех $1 \leq m \leq \ell_1$, $|k| > N$.

Доказательство этого утверждения является наиболее технически сложным в данной работе, в частности, оно требует доказательства следующего важного соотношения: $D(z, \xi, \lambda_m^k) \in \operatorname{Im} \Delta(\lambda_m^k)$. \square

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Используя результаты приведенные выше мы покажем верность пункта (i) теоремы 1 сформулированной во введении.

Theorem 4. (об устойчивости). Если $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ и $\sigma_1 = \sigma(A_{-1}) \cap \{\mu : |\mu| = 1\}$ содержит только простые собственные значения, тогда система (1)-(2) является сильно асимптотически устойчивой.

Доказательство. Разложим фазовое пространство в прямую сумму \mathcal{A} -инвариантных подпространств M_2^1 и M_2^0 (теорема 2). Подпространство M_2^1 обладает базисом Рисса из собственных векторов оператора \mathcal{A} , и, применяя технику сходную с приведенной в работе [10], мы доказываем, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{t\mathcal{A}}x = 0$ для всех $x \in M_2^1$, т.е. полугруппа $\{e^{t\mathcal{A}}|_{M_2^1}\}_{t \geq 0}$ является сильно асимптотически устойчивой. Из теоремы 3 следует, что сужение $R(\lambda, \mathcal{A})|_{M_2^0}$ ограничено в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$ и, следовательно, сужение $\{e^{t\mathcal{A}}|_{M_2^0}\}_{t \geq 0}$ является экспоненциально устойчивым (см., например, [12]). Следовательно, полугруппа $\{e^{t\mathcal{A}}\}_{t \geq 0}$ является сильно асимптотически устойчивой. \square

Отметим, что как доказательство пункта (ii), так и доказательство пункта (iii) теоремы не используют существования базиса Рисса пространства M_2 и, следовательно, не используют существенно предположения $\det A_{-1} \neq 0$. Однако, для полноты мы приводим здесь пример иллюстрирующий пункт (iii) теоремы 1.

Пример. Мы рассматриваем следующий частный случай уравнения (1):

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{z}(t-1) + \begin{pmatrix} -1 & s \\ 0 & -1 \end{pmatrix} z(t), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Матрица A_{-1} обладает двумерным собственным пространством соответствующим собственному значению $\mu = -1 \in \sigma_1$. Собственные значения соответствующего оператора \mathcal{A} удовлетворяют уравнению $\lambda e^\lambda + \lambda + b e^\lambda = 0$. Таким образом, для всех значений s операторы \mathcal{A} обладают одним и тем же спектром. Используя результаты о расположении корней трансцендентных функций доказанные в работе Л.С. Понтрягина [4, 1942], мы доказываем, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Однако, при $s = 0$ оператор \mathcal{A} обладает только собственными векторами (нет корневых векторов) и система (12) является устойчивой, а при $s \neq 0$ оператор \mathcal{A} обладает семейством корневых векторов и система (12) неустойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Власов В.В. *О базисности экспоненциальных решений функционально-дифференциальных решений уравнений в пространствах Соболева*, Докл. РАН. – 2001. – 381, №3 – С. 302-304.
- [2] Власов В.В. *О базисности семейства экспоненциальных решений дифференциально-разностных уравнений*, Изв. вузов Мат. – 2002. – №6 – С. 7-13.
- [3] Власов В.В., Медведев Д.А. *Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории* // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 30. С. 3-173 – 2008.
- [4] Понтрягин Л.С. *О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций*, Известия АН СССР. – 1942. – 6. – стр. 115-134.
- [5] W. E. Brumley. *On the asymptotic behavior of solutions of differential-difference equations of neutral type*, J. Differential Equations, 7:175–188, 1970.
- [6] Burns, John A., Herdman, Terry L., Stech, Harlan W. *Linear functional-differential equations as semigroups on product spaces*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 14, Issue 1 (1983), 98–116.
- [7] Jack K. Hale and Sjoerd M. Verduyn Lunel. *Introduction to functional-differential equations*// volume 99 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York – 1993.
- [8] R. Rabah, G. M. Sklyar, and P. Yu. Barkhayev. *Stability analysis of mixed retarded-neutral type systems*, Preprint IRCCyN, Nantes, RI2008_8, 2008.
- [9] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. *On strong regular stabilizability for linear neutral type systems*, J. Differential Equations 45 (2008), No. 3, 569–593.
- [10] Rabah R., Sklyar G. M., Rezounenko A. V. *Stability analysis of neutral type systems in Hilbert space*, J. Differential Equations 214 (2005), No. 2, 391–428.
- [11] R. Rabah, G. M. Sklyar, and A. V. Rezounenko. *Generalized Riesz basis property in the analysis of neutral type systems*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 337(1):19–24, 2003.
- [12] Jan van Neerven. *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators* // volume 88 of *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel – 1996.
- [13] S. M. Verduyn Lunel and D. V Yakubovich. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations*, Integral Equations Oper. Theory 27(1997), 347-378.

E-mail: sklar@univ.szczecin.pl, rabah@emn.fr, pbarhaev@inbox.ru

P. RABAH, FRANCE, F-44307, FRANCE, NANTES CEDEX 3, IRCCyN, ÉCOLE DES MINES DE NANTES, 4 RUE ALFRED KASTLER

Г.М. СКЛЯР, 70451, POLAND, SZCZECIN, INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF SZCZECIN, WIELKOPOLSKA STR., 15

П.Ю. БАРХАЕВ, 61077, УКРАИНА, ХАРЬКОВ, ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. В.Н. КАРАЗИНА, МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ, КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УПРАВЛЕНИЯ, пл. СВОБОДЫ, 4.

ABSTRACT

The strong asymptotic stability property of mixed retarded-neutral type systems is studied. We consider an operator model of the system in Hilbert space. Two technics are combined to get the condition of asymptotic non-exponential stability: the existence of a Riesz basis of invariant finite-dimensional subspaces and the boundedness of the resolvent in some subspaces of a special decomposition of the state space.

АННОТАЦИЯ

В работе изучается сильная асимптотическая устойчивость систем нейтрального типа с одним вырожденным нейтральным слагаемым. Мы рассматриваем операторную модель системы в гильбертовом пространстве. Для получения достаточного условия сильной устойчивости мы используем две техники: базисов Рисса из инвариантных конечномерных подпространств и ограниченность резольвенты на некотором подпространстве спектрального разложения фазового пространства.

АНОТАЦІЯ

У роботі вивчається сильна асимптотична стійкість систем нейтрального типу з одним виродженням нейтральним доданком. Ми розглядаємо операторну модель системи в гільбертовому просторі. Для отримання достатньої умови сильної стійкості ми використовуємо дві техніки: базисів Рісса з інваріантних скінченновимірних підпросторів і обмеженість резольвенти на деякому підпросторі спектрального розкладу фазового простору.